Έστω $f: U \to \mathbb{R}$ με $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό και $(x_0, y_0) \in U$,
τότε (αν υπάρχουν) τα όρια

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\qquad \| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

, ονομάζονται μερικές (partial) παράγωγοι της f στο σημείο (x_0, y_0) ως προς x και ως προς y αντίστοιχα.

Το διάνυσμα $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) := \operatorname{grad} f(x_0, y_0)$
$:= \nabla f(x_0, y_0)$
ονομάζεται κλίση (ή βαθμωση)
της f στο σημείο (x_0, y_0).

(Το σύμβολο ∇ ονομάζεται ανάδελτα, στα αγγλικά και αλλού nabla, που προέρχεται από την άρπα στα εβραϊκά).

[$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$, είναι ένας τελεστής (απεικόνιση)
που εμφανίζεται σε διάφορες μορφές].

Π.χ $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right) = \operatorname{grad} f(x,y)$

ή, έστω $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $\bar{f} = (f_1, f_2)$, τότε (αν υπάρχει) το $\nabla \cdot \bar{f}(x,y) = \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}\right) \cdot \left(f_1(x,y), f_2(x,y)\right)$

$$= \frac{d}{dx} f_1(x,y) + \frac{d}{dy} f_2(x,y) := div \bar{f}(x,y)$$

, ονομάζεται απόκλιση (divergence) του διανυσματικού πεδίου $\bar{f}$ στο σημείο (x,y).

Παράδειγμα:

[Μπορεί σε ένα σημείο να υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι, αλλά στο σημείο αυτό η πραγματική συνάρτηση να μην είναι συνεχής?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Για $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{df}{dx}(x,y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \frac{y(x^2+y^2) - xy2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{y^3 - yx^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

και αντίστοιχα $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

Για $(x,y)=(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών.
Στο σημείο $(0,0)$ θέλουμε

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \overset{?}{=} 0$. Όμως το όριο αυτό δεν υπάρχει,

αφού $f\left(\frac{1}{\nu},0\right) = 0 \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$, ενώ $f\left(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu}\right) = \frac{\frac{1}{\nu^2}}{2\frac{1}{\nu^2}} = \frac{1}{2}$

$\longrightarrow \frac{1}{2}$.

Ορισμός: Η $\bar{f} = (f_1, \dots, f_m)$, $U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό,

ονομάζεται μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$,
αν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{x})$ υπάρχουν $\forall\, i = 1, \dots, n$
$\forall\, j = 1, \dots, m$

, δηλαδή αν οι συνιστώσες της f_j είναι μερικώς διαφορίσιμες στο $\bar{x}$

→ Υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι των συνιστωσών της $\bar{f}$

Ο πίνακας των μερικών παραγώγων $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{x})$
λέγεται Ιακωβιανός πίνακας, $J_{\bar{f}}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$

Από τις ιδιότητες των παραγώγων πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής, προκύπτει μέσω του ορισμού των μερικών παραγώγων, ότι οι ιδιότητες μεταφέρονται. (Άλγεβρα Ιακωβιανών πινάκων)

- $J_{(\bar{f} \pm \bar{g})}(\bar{x}) = J_{\bar{f}}(\bar{x}) \pm J_{\bar{g}}(\bar{x})$
- $J_{\phi \bar{f}(\bar{x})} = \bar{f}(\bar{x})\, \mathrm{grad}\, \phi(\bar{x}) + J_{\bar{f}(\bar{x})}\, \phi(\bar{x})$